数理解析研究所講究録
325 巻 1978 年 30-33

Finite groups admitting an automorphism of prime order

北大 理　　福島 博

Gを有限群, $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, $|\alpha| = p$; prime $(p, |G|) = 1$ とする。以下この設定で議論をすすめる。このとき次の有名な予想がある。

<u>Conjecture</u>　$C_G(\alpha)$; nilpotent $\xrightarrow{?}$ Gは solvable

これに関連して次の結果がある。

<u>Theorem</u> (B. Rickman)

$$\left.\begin{array}{l} C_G(\alpha) \text{ ; cyclic } q\text{-group} \\ q \text{ ; prime} \\ q \geq 5 \end{array}\right\} \longrightarrow G \text{ は solvable}$$

これに関して次の結果が得られた。

<u>Theorem</u>

$$\left.\begin{array}{l} C_G(\alpha) \text{ ; } q\text{-group} \\ q \text{ ; odd prime} \end{array}\right\} \longrightarrow G \text{ は solvable}$$

The structure of solvable groups satisfying the hypothesis of the theorem.

Shult の定理により次の結果を得る。

$$G = O_{q,q'}(G)\,C_G(\alpha)$$

<u>Proof of the theorem.</u>

Gを最小位数の反例とする。

<u>Lemma 1.</u> G is simple.

Glauberman の "Sufficient condition for p-stability" の結果により，次の Lemma を得る。

<u>Lemma 2.</u> $q = 3$.

∵) $q \neq 3$ とすると，Gは S_4-free となり矛盾を得る。

<u>Lemma 3.</u>

$\forall r \in \pi(G) - \{2, 3\}$

$\forall R_0$; r-subgroup of G

$\longrightarrow N_G(R_0)/C_G(R_0)$ は，$\{3, r\}$-group.

Lemma 3 と，minimal simple の分類により G は．$L_2(7)$ or $L_3(3)$ を，involve することがわかる。

$r \in \pi(G) - \{2, 3\}$

R; α-invariant Sylow-r-subgroup とする。

<u>Lemma 4.</u>

$g \in C_G(\alpha) \cap N_G(R)^{\#} \longrightarrow C_R(g) = 1.$

Lemma 4 より次の Lemma を得る。

<u>Lemma 5.</u>

$1 \neq x$; r-element $\longrightarrow$ $C_G(x)$ は、r-nilpotent.

Signalizer functor を用いることで次の Lemma をえる。

<u>Lemma 6.</u>

$SCN_3(R) \neq \phi$

$x \in R^{\#} \longrightarrow C_G(x)$ は、$\{2, 3\}'$-group.

R_1; α-invariant Sylow 7-sub-group

R_2; α-invariant Sylow 13-subgroup とする。

$SCN_3(R_1) = \phi$ のときは、$p = 2$ or 3 となり G は、solvable となる。 よって $SCN_3(R_1) \neq \phi$ としてよい。

$SCN_3(R_2) = \phi$ のときは、$p = 7$、よって $(7, |G|) = 1$. Lemma 3 と合わせて、$G \simeq L_3(3)$ となる。$L_3(3)$ の automorphism を考えることにより矛盾をえる。

よって $SCN_3(R_2) \neq \phi$ としてよい。

Lemma 6 より, $C_G(t)$ は, $\{7, 13\}'$-group for every involution or 3-element t. 特に $C_G(t)$ は solvable.

Mason の結果により，次のいずれかが成立する。

Q ; α-invariant S_3-subgroup とする。

(i) G has 2-local 3-rank at most 1.

(ii) Q has rank 2.

(iii) Q normalizes a non-trivial 2-subgroup of G.

(i), (ii), (iii) のいずれの場合も，矛盾をえる。

問題

$$C_G(\alpha) \text{ ; 2-group} \xrightarrow{?} G \text{ は, solvable.}$$